

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A IX A

1. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 3$ și $g(x) = x + b$.
 - a. Să se determine a și $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $M(-1, 4)$ să fie punct comun graficelor G_f și G_g .
 - b. Să se demonstreze că pentru a și b determinați mai sus $G_f \perp G_g$.
 - c. Să se determine aria suprafeței cuprinse între graficele funcțiilor f, g și axa Ox .
2. Un grădinar a plantat într-una dintre grădinile pe care le îngrijește parcele cu tufe de trandafir din soiuri distincte, astfel încât fiecare parcelă conține trandafiri dintr-un alt soi. Într-o zi are de realizat un aranjament floral din acești trandafiri. Analizează tufele și procedează în felul următor: din prima parcelă taie trei trandafiri, din cea de a doua taie de două ori mai mulți decât din prima ș.a.m.d., tăind dintr-o parcelă de două ori mai mulți trandafiri decât din parcela precedentă.
 - a. Câte soiuri de trandafiri trebuie să folosească grădinarul pentru a realiza aranjamentul floral, astfel încât acesta să fie format din 6141 de trandafiri?
 - b. Care este numărul minim de trandafiri pe care trebuie să-l aibă parcela a IX-a pentru a putea fi folosită la realizarea aranjamentului floral?
3. Din mulțimea $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ se aleg la întâmplare două elemente a și b , nu neapărat distincte. Care este probabilitatea ca ecuația $x^2 + 2ax + b = 0$ să admită rădăcini reale?
4. Fie ABCD un patrulater convex și punctele $M \in [AD]$, $N \in [BC]$ care împart segmentele $[AD]$ și $[BC]$ în același raport m . Să se determine vectorul \overrightarrow{MN} în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{DC} .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A X A

1. Se consideră mulțimea $A = \{k + \sqrt{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
 - a) Să se demonstreze că $\mathbb{Z} \subset A$.
 - b) Să se demonstreze că $\sqrt{2} - 1 \in A$ și $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin A$.
 - c) Să se demonstreze că $\sqrt{101} - 10 \in A \cap \left(0, \frac{1}{20}\right)$.
2.
 - a) Să se demonstreze că: $\log_2 5 \in (2; 3)$;
 - b) Să se rezolve ecuația $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$
3. Un șoricel se află la 20 pași de adăpostul său. Pisica se află la 5 sărituri în spatele șoricelului și începe urmărirea simultan cu fuga șoricelului spre adăpost. Când pisica face o săritură, șoricelul face 3 pași. O săritură a pisicii este echivalentă cu 10 pași ai șoricelului. Poate pisica să prindă șoricelul până la intrarea în adăpost ?
4. Un alfabet al extraterestrilor conține doar două litere: A și B. Acest alfabet are următoarea proprietate: Dacă se șterge subcuvântul AB dintr-un cuvânt, sau se introduce într-o oarecare poziție a cuvântului ales subcuvântul BA sau subcuvântul AABB, atunci se obține un cuvânt sinonim cu cel ales. (se acceptă și cuvinte formate dintr-o singură literă)
 - a) Aplicând oricare dintre cele trei operații unui cuvânt ales, diferența dintre numărul de litere A și numărul de litere B se modifică ?
 - b) Cuvintele ABA și BABA sunt sinonime ?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XI A

1. La un concurs, în care punctajele se situează între 0 și 100, s-au obținut rezultatele: 75; 21; 46; 82; 33; 11; 3; 95; 87; 63; 49; 51; 17; 29; 38; 77; 83; 59; 68; 41; 33; 27; 14; 63; 48; 46; 76; 75; 19; 92; 81; 16; 28; 49; 54; 71; 83; 66; 94; 25.
 - a) Grupați rezultatele concursului într-un tabel, în funcție de apartenența acestora la clasele statistice: $[0; 20]$, $(20; 50]$, $(50; 90]$, $(90; 100]$;
 - b) Determinați mediana seriei statistice formată cu notele obținute în concurs;
 - c) Dacă primii 25% dintre concurenți sunt premiați, determinați punctajul minim de obținere a unui premiu și media notelor obținute de concurenții premiați.
2. Doi angajați au același salariu. Pe parcursul a trei ani, primului angajat i se reduce salariul cu 25 %, după care i se mărește cu 25 %. Al doilea angajat suferă o diminuare a salariului cu 25 %, după care obține o majorare a salariului cu 10 %, apoi o altă majorare cu 15 %. Care dintre cei doi angajați va avea la final un salariu mai mare?
3. Se consideră graful orientat $G = \{X, U\}$.
 - a) Dacă $|X| = 5$ și $U = \{(1,2), (4,1), (2,3), (2,5)\}$, determinați numărul minim de arce care trebuiesc adăugate pentru ca orice vârf să aibă gradul interior egal cu gradul exterior.
 - b) Dacă $|X| = 9$ și $U = \{(2,1), (1,6), (2,5), (2,3), (3,4), (4,6), (5,7), (4,8), (8,9)\}$, determinați vârfurile legate de nodul 2 prin drumuri de lungime minimă egală cu a drumului minim dintre 2 și 6.
 - c) Dacă $|X| = 10$, șirul gradelor vârfurilor sale poate fi 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 9?
4. Păcală și Tândală au primit salariul lunar în bancnote de 13 lei. Într-un magazin Păcală a cumpărat 9 pachete de biscuiți, 10 cârnăciori și 7 ciocolate, iar Tândală a cumpărat 5 pachete de biscuiți, 7 cârnăciori și o ciocolată. Prețurile unui pachet de biscuiți, al unui cârnăcior și a unei ciocolate sunt numere întregi în lei. Păcală a plătit pentru toate cumpărăturile făcute de el un număr întreg de bancnote, fără sa primească rest.
Să se demonstreze că și Tândală poate achita cumpărăturile făcute la fel.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XII A

1. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

2. Se consideră matricele: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$B = I_3 + A$ și $C = I_3 + aA$, $a \in \mathbb{R}$.

a. Să se calculeze $S = A - XY$

b. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$

c. Să se demonstreze că $A^4 = 14^3 \cdot A$ și apoi faptul că $A^{n+1} = 14^n \cdot A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3. Doi elevi E_1 și E_2 joacă următorul joc:

Înlocuiesc, succesiv elementele unei matrice pătratică de ordinul al doilea cu numere întregi, punând pe fiecare linie câte un număr.

Jocul este început de elevul E_1 .

Câștigă jocul elevul care în urma completării tuturor elementelor matricei, face ca modulul determinantului matricei să fie un număr par.

Să se demonstreze că elevul E_2 poate aplica acea strategie care îl duce la câștig, indiferent de numerele completate de elevul E_1 .

4. Într-un plan, raportat la reperul ortogonal de axe de coordonate (xOy) se dau punctele: $A(0;6)$; $B(a;4)$; $C(-1;4)$.

a. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele A, B și C să fie coliniare.

b. Pentru $a = 5$ să se determine aria triunghiului ABC.

c. Pentru $a = 5$ să se scrie ecuația medianei corespunzătoare laturii BC.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.